UDK 33 ISSN 1330-1039

EKONOMSKA MISAO I PRAKSA

GODIŠNJAK FAKULTETA ZA TURIZAM I VANJSKU TRGOVINU DUBROVNIK
ANNUAL OF THE FACULTY OF TOURISM AND FOREIGN TRADE - DUBROVNIK

FTVT osnovan 1970.
FTVT founded 1970.

SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET ZA TURIZAM I VANJSKU TRGOVINU
DUBROVNIK, Lapadska obala 7 REPUBLIKA HRVATSKA

UNIVERSITY OF SPLIT
FACULTY OF TOURISM AND FOREIGN TRADE
DUBROVNIK, Lapadska obala 7 REPUBLIC OF CROATIA

EKON. MISAO PRAKSA GOD. II. (1993) Str. 1 - 216 DUBROVNIK

Dr. Ivica Martinović
Voditelj projekta "Djelo Ruđera Boškovića u obzorju europskoga mišljenja" u Institutu za filozofiju Sveučilišta u Zagrebu

BOŠKOVIĆEVA FUNKCIJA ZA UTROŠAK VOSKA PRI IZGRADNJI PČELINJEGA SAĆA*

UDK 330.6 Bošković
Izvorni znanstveni rad
Prihvaćeno: 8.11.1993.

Sažetak

Za vrijeme svoga boravka u Parizu 1760. godine Ruđer Bošković je proučavao oblik pčelinje stanice kao matematički problem nalaženja najmanjeg oplošja za zadani prizmatični obujam te odmah upozorio na gospodarsku motivaciju toga problema: "uporaba najmanje količine voska". Riješivši problem s pomoću geometrijske metode, Bošković je zaključio da se rješenje lako dobiva i sredstvima infinitezimalnoga računa. U okviru analitičkoga pristupa Bošković je pronašao funkciju koja opisuje oplošje pčelinje stanice, a time i utrošak voska pri gradnji pčelinje stanice. Boškovićeva se funkcija može protumačiti u sklopu dvaju gospodarskih modela: optimalizacija uz uvjet i izbor tehnologije s najmanjim troškovima. Zato je ovaj problem iz hrvatskog matematičkog i gospodarskog naslijeđa prikladan da bude uvršten u monografiju ili udžbenik koji se bavi primjenama diferencijalnoga računa u gospodarstvu. Članku su priloženi prvi prijevodi Boškovićeva geometrijskog i analitičkog rješenja na hrvatski jezik.

Ključni pojmovi:* *funkcija stalnog troška, funkcija stalne količine proizvodnje, izbor tehnologije s najmanjim troškovima, geometrijski oblik stanice pčelinjega saća, Boškovićeva funkcija za utrošak voska pri gradnji stanice pčelinjega saća, minimum funkcije, geometrijska metoda, infinitezimalni račun, optimum

---

* Autor izriče zahvalnost osoblju Knjižnice Male braće u Dubrovniku na susretljivošću što je mogao proučavati rijetko izdanje Stayeva spjeva *Philosophiae recentioris ... versibus traditae libri X*, Tomus secundus (Romae: Palearini, 1760) sa signaturom KMB 35-VII-25.

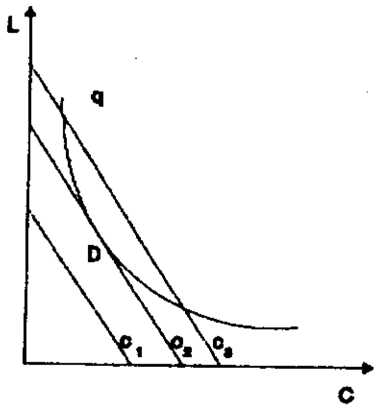
Arte favus mira compingitur, & licet ollis
Haud ulla artifici tractetur regula dextra,
Appositos tamen & flexus novere, modosque
Senorum laterum; spatia implent cuncta, caventque,
Nusquam ne constet cerae parcissimus usus.

Benedikt Stay, *Recentioris philosophiae...libri X* (Romae: Palearini, 1760), l. 6, vv. 2334-2336, p. 290.

Uz mnoge druge pristupe, proučavanje proizvodnje može otpočeti tako da se istraži odnos između funkcije stalnog troška c (eng. *isocost*) i funkcije stalne količine proizvodnje q (eng. *isoquant*). Pritom prvospomenuta funkcija zacijelo iskazuje uzajamnu ovisnost čimbenika proizvodnje uz unaprijed dane ukupne troškove, dok u ovoj drugoj valja prepoznati onu vrstu funkcije proizvodnje koje prikazuje uzajamnu ovisnost istih čimbenika uz unaprijed određenu razinu proizvodnje. Kako svaki međuodnos čimbenikâ proizvodnje opisuje jednu tehnološku mogućnost, to funkcija stalne količine proizvodnje predočuje velik raspon tehnoloških mogućnosti za proizvodnju željene količine proizvoda. Gospodarska zadaća, koja istražuje kako postići postavljeni cilj proizvodnje uz što manje troškove, matematički se modelira tako što se na funkciji stalne količine pronađe točka u kojoj se postižu najmanji troškovi. Ta se zamisao može jednostavno predočiti u ravninskom koordinatnom sustavu uz naravnu pretpostavku da i troškovi i proizvodnja ovise o dva ista čimbenika, obično o radu L i kapitalu C (sl. 1). Funkcija stalne količine prikaže se nekom krivuljom q, a funkcije stalnog troška sustavom pravaca c_1, c_2, ... koji ne prolaze ishodištem. Grafičko rješenje postavljenoga problema je točka u kojoj jedna funkcija stalnog troška dira funkciju stalne količine. Za postupak pronalaženja toga dirališta D već se uvriježio stručni nazivak "izbor tehnologije s najmanjim troškovima" *(the cost-minimising choice of technology).*[1]

Jedan "izbor tehnologije s najmanjim troškovima", i to shvaćen u doslovnom smislu, moguće je pronaći u hrvatskoj matematičkoj baštini. Riječ je o funkciji koja opisuje utrošak voska što ga pčele koriste u izgradnji svoga saća, a koju je funkciju godine 1760. u Parizu oblikovao Ruđer Bošković da bi egzaktno dokazao kakav je matematički oblik pčelinje stanice. U ovom ću članku najprije u povijesnom kontekstu prikazati problem najštedljivije uporabe voska pri izgradnji pčelinjega saća, a zatim ću, slijedeći Boškovićeve matematičke postupke, sažeto izložiti problem u matematičkom obliku i prikazati oba njegova rješenja, jedno uz

1 Usp. David F. Heathfield and Sören Wibe, *An Introduction to Cost and Production Functions* (Houndmills/London: MacMillan Education Ltd., 1987), osobito poglavlje "Cost functions and the theory of the firm", pp. 28-52.



Sl. 1. Izbor tehnologije s najmanjim troškovima: određivanje dirališta funkcije stalnog troška i funkcije stalne količine proizvodnje

pomoć geometrijske a drugo uz pomoć infinitezimalne metode. Pritom ću upozoriti na istančane iskaze u kojima je Bošković uspoređivao učinkovitost dviju metoda. Napokon, rasvijetlit ću gospodarska značenja problema te ću problem kojemu je Bošković posvetio toliko istraživačkog žara zapisati u obliku zadatka koji bi, kao istaknuti povijesni primjer, zavrijedio ući u svaki monografski prikaz ili zbornik zadataka posvećen primjenama matematičkih metoda u gospodarstvu.

GOSPODARSKO OBRAZLOŽENJE PROBLEMA: "NAJŠTEDLJIVIJA UPORABA VOSKA"

Dvije su okolnosti bitno utjecale na prvi rimski susret Ruđera Boškovića i Benedikta Staya što se zbio 1745. godine: Stay je 1744. godine u Veneciji objavio spjev o Descartesovoj filozofiji prirode *Philosophiae versibus traditae libri sex (Šest knjiga filozofije u stihovima)* što ga je spjevao u dubrovačkom kulturnom krugu Marina Sorkočevića, a Bošković je već tada slovio kao revni i, vrijeme je pokazalo, najutjecajniji privrženik Newtonove filozofije prirode na Apeninskom poluotoku. Tom je prigodom Bošković nagovorio Staya da u stihovima prikaže "noviju", dakle Newtonovu filozofiju prirode, kako to posvjedočuje Boškovićevo pismo upućeno bratu Božu u Dubrovnik 11. listopada 1745.[2] U zajednički projekt *Philosophiae*

2 Vidi o tome opširnije u: Žarko Dadić, "Benedikt Stay i njegove poeme o prirodoznanstvenim filozofijama", u: *Povijest egzaktnih znanosti u Hrvata,* knjiga prva (Zagreb: Liber, 1982), str. 296-300; Ivica Martinović, "Pretpostavke za razumijevanje geneze Boškovićevih ideja o neprekinutosti i

recentioris ... versibus traditae libri X (Deset knjiga novije filozofije u stihovima) uložio je Bošković sve svoje pedagoško umijeće. Mjesecima je Stayu sustavno i svakodnevno izlagao Newtonovu fiziku, uključujući i dostignuća fizičara poslije Newtona i drugu građu što je tada bila predmetom znanstvenih istraživanja. Stay je brzo napredovao u versifikaciji i u svemu ispjevao 24.227 heksametara o Newtonovoj i Boškovićevoj filozofiji prirode. Izdavanje spjeva kočio je Bošković, pokretač cijele zamisli, jer nije, zbog svojih razgranatih djelatnosti, s istim poletom napisao bilješke i dopune koje su stihovi zahtijevali. Tako se dogodilo da je prvi svezak objavljen godine 1755, drugi 1760, dok se treći pojavio iza Boškovićeve smrti 1792. godine, i to, nažalost, bez dopuna. A upravo se dopune, kao zaokruženi, kritički ogledi na zadane filozofske, fizičke ili matematičke teme, ubrajaju u sam vrh Boškovićeva stvaralaštva.

Drugi je svezak Stayeva spjeva uglavnom posvećen astronomskoj slici svijeta u Newtonovu sustavu. Izvan toga tematskog kruga iznimno su obrađene dvije prirodne pojave o kojima je Bošković poučavao Staya: paukova mreža i pčelinje saće. Boškovićeva pouka o geometrijskom umijeću pčela zrcali se u Stayevim stihovima koji se nalaze pri samom kraju šeste knjige spjeva:

"Čudesnim umijećem sklapa se saće. Iako za posude
Umjetniku poslužila nisu nikakva mjerila vješta,
Prikladne prijevoje poznaju pčele, pravila znaju
Sa šest stranica: čitave prostore pune pa bdiju.
Nikada, znano je, štedljivije uporabe voska."[3]

Stayev jezgrovit iskaz zahtijevao je dodatna tumačenja za koja se pobrinuo Bošković napisavši bilješku i posebni ogled upravo uz ove stihove. U bilješci je prvo prikazao dvije temeljne matematičke ideje pri gradnji pčelinjega saća:

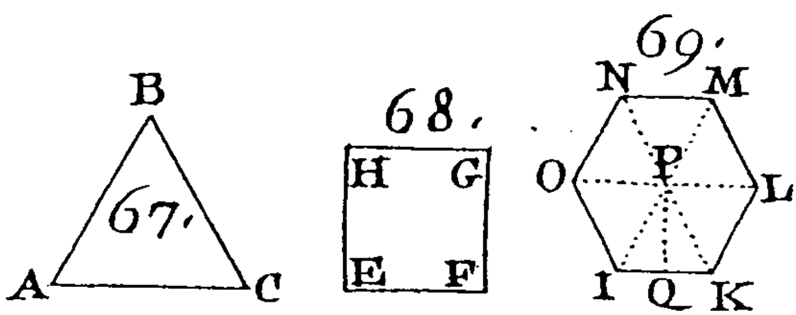
"Nadalje, [naš pjesnik] prikazuje čudesno umijeće u [pčelinjim] stanicama što ih treba graditi, pri čemu je pak dvoje dostojno spomenuti: prvo, koristi se šesterokutni lik koji je od svih likova jednakoga oboda najprostraniji, što su znali i Stari i zato pčele nazivali geometrima; a drugo, opaženo u našem stoljeću, da se vrhovi njihovih stanica omeđuju trima rombovima što se sastaju pod prostornim kutom, pa postoji onaj lik

beskonačnosti: kronologija radova, povijesna samosvijest, tematske odrednice", *Vrela i prinosi* 16 (1986), str. 3-22, str. 11-12.

3 Benedictus Stay, *Recentioris philosophiae ... versibus traditae libri X*, Tomus secundus (Romae: Typis, et sumptibus Nicolai et Marci Palearini, 1760), l. 6, vv. 2332-2336, p. 290, ovdje u mom prijevodu na hravatski. Vidi latinski izvornik u mottu ovoga članka.

samih rombova ili postoje oni njihovi ravninski kutovi da se, uz isti obujam stanica, upotrijebi najmanja što se može količina voska čime najviše štede."[4]

Zatim je pobliže rastumačio Stayeve poetske izričaje s matematičkim sadržajem. U izričaju "prikladni prijevoji" *(appositi flexus)* treba prepoznati prostorne kutove što ih zatvaraju tri romba kako bi se upotrijebila najmanja količina voska, a u izričaju "pravila o šest stranica" *(modi senorum laterum)* treba prepoznati osnovnu prednost šesterokuta pred ostalim pravilnim likovima jednake površine (sl. 2).



Sl. 2. Trokut, kvadrat, šesterokut: pravilni geometrijski likovi jednakoga opsega, a različite površine. Boscovich, "De apium cellulis", u: Benedictus Stay, Philosophiae recentioris ... versibus traditae libri X, *Tomus II. (Romae: Pagliarini, 1760), Tab. III., figg. 67-69.*

Geometrijsku građu, koju je u bilješci tek natuknuo,[5] Bošković je sustavno razradio u samostalnom ogledu gdje se slobodno mogao poslužiti matematičkim instrumentarijem epohe: geometrijskom i infinitezimalnom metodom. Boškovićev prinos iz "primijenjene" matematike nastao je tijekom njegova boravka u Parizu. Štoviše, na temelju prepiske između dvojice braće Ruđera i Bara, moguće je još preciznije ustvrditi: nastao je u prvom tjednu travnja 1760. godine. Uz pismo, što ga je uputio Baru u Rim 31. ožujka, Ruđer je priložio listove za Benedikta Staya u kojima se nalazilo gotovo sve od preostalih njegovih dopuna za drugi svezak Stayeve *Recentioris philosophiae.* Nedostajala je, zabilježio je Ruđer u pismu bratu, još jedino dopuna o pčelama koja će biti kratka.[6] A uz pismo bratu Baru

---

4 Rugerius Josephus Boscovich, "Adnotatio 1", u: Stay, *Recentioris philosophiae ... libri X*, p. 290.

5 Boscovich, "Adnotatio 1", u: Stay, *Recentioris philosophiae ... libri X*, pp. 289-291, na pp. 290-291.

6 Vidi pismo Ruđera Boškovića Baru Boškoviću, Paris, 31. ožujka 1760, br. 29, u: Željko Marković (ur.), "Boškovićev put u Francusku g. 1759./60.", u: *Građa za život i rad Rudžera Boškovića* 2 (Zagreb: JAZU, 1957), str. 124-126, na str. 124: "In questi foglietti [per D. Beno] vi e quasi tutto il residuo, mancando solamente l'affar delle api, che e corto."

s nadnevkom 6. travnja iste godine Bošković je već priložio pošiljku za Benedikta Staya u kojoj se nalazila ta završna dopuna.[7] I, doista, ogled pod naslovom *De apium cellulis (O pčelinjim stanicama)* uvršten je kao posljednja Boškovićeva dopuna uz drugi svezak Stayeva prirodoznanstvenoga spjeva.[8]

U uvodu ogleda Bošković je ponovno izložio dvije temeljne ideje u geometrijskom obliku pčelinje stanice, da bi zaključio: "U oba slučaja pčele, kako izgleda, najviše štede vosak, u onome što treba napraviti rade mnogo."[9] To znači samo jedno: povijesni kontekst Boškovićeva matematičkoga prinosa višestruko upućuje na gospodarsko obrazloženje problema: štednju gradivnoga materijala voska. Stayevi stihovi ističu "najštedljiviju uporabu voska" (*cerae parcissimus usus*) i time posredno svjedoče kako je Bošković poučavao Staya o tom predmetu, dok Boškovićeva kratka bilješka ispod stihova i Boškovićev samostalni ogled *De apium cellulis* izričito zbore o uštedi voska.

BOŠKOVIĆEV MATEMATIČKI OPIS STANICE PČELINJEGA SAĆA

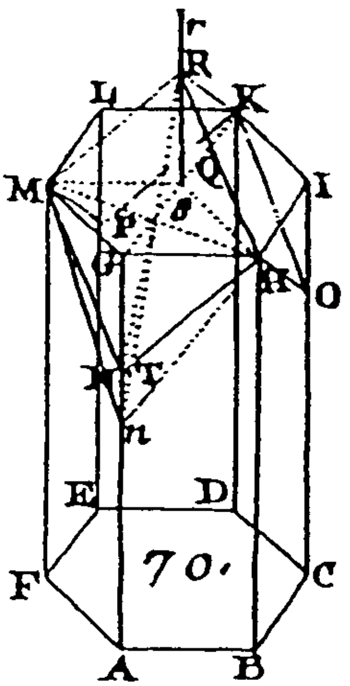
U dopuni *De apium cellulis* Bošković je nakanio matematički provjeriti Réaumurovu pretpostavku da stanica pčelinjega saća među prizmatičnim tijelima jednakog obujma ima najmanje oplošje te egzaktno rješenje usporediti s Maraldijevim mjerenjima, predočenima Académie des Sciences u Parizu 1712. godine. Pčelinja je stanica, kako je to izložio Réaumur u svom znamenitom djelu o kukcima *Mémoires pour servir à l'histoire des Insectes* (1740), prizmatična tvorevina. Presjek joj je šesterokut, dakle lik koji među pravilnim geometrijskim likovima jednaka opsega ima najveću površinu, a pobočke su joj trapezi. Odozgo je naravski otvorena kako bi pčela mogla ući i ostaviti med, dok odozdo nije omeđena, kako bi se očekivalo, šesterokutom, nego trima rombovima jednake površine što se pod prostornim kutom sastaju u jednoj točki (sl. 3).

---

7 Vidi pismo Ruđera Boškovića Baru Boškoviću, Paris, 6. travnja 1760, br. 30, u: Marković, "Boškovićev put u Francusku g. 1759./60.", str. 126-130, na str. 127: "Vi accludo un piego per D. Beno, in cui vi è il fine di tutto."

8 Rogerius Josephus Boscovich, "De apium cellulis", supplementum 6. ad librum sextum, u: Benedictus Stay, *Philosophiae recentioris ... versibus traditae libri X*, Tomus secundus (Romae: Typis, et sumptibus Nicolai et Marci Palearini, 1760), nn. 656-680, pp. 498-504, figg. 67-71.

9 Boscovich, "De apium cellulis", n. 656, p. 498: "adeoque utrobique apes parcere cerae, quam licet, maximè, in qua conficienda laborant plurimum."



Sl. 3. Oplošje stanice pčelinjega saća: ploha najmanje površine među prizmatičnim plohama koje omeđuju unaprijed određeni obujam. Boscovich, "De apium cellulis", u: Benedictus Stay, Philosophiae recentioris ... versibus traditae libri X, Tomus II. (Romae: Pagliarini, 1760), Tab. III., fig. 70.

Oplošje stanice sastoji se, dakle, od šest trapeza i tri romba, a problem određivanja najmanjeg oplošja takva tijela svodi se na određivanje oblika romba. Suočen s tako oblikovanim zadatkom, Bošković je prvo potražio geometrijsko, pa tek onda analitičko rješenje. Takav je postupak bio važno obilježje Boškovićeve matematičke metodologije.[10]

---

10 Boškovićevu matematičku metodologiju sustavno sam istraživao u: Ivica Martinović, "Bošković's choice of method at the beginning of his mathematical career", *Dijalektika* 23 (1988), str. 57-71, Ivica Martinović, "The genesis of Bošković's contributions to mathematics", u: Fritz Krafft and Christoph J. Scriba (eds), *XVIIIth International Congress of History of Science, 1st - 9th August 1989, Hamburg/Munich: Abstracts* (Hamburg: International Union of the History and Philosophy of Science/Division of History of Science, 1989), M2-13; Ivica Martinović, *"Rimsko razdoblje" Boškovićeva mišljenja* (Zagreb: Filozofski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1992), doktorska disertacija, osobito poglavlje "Neostvarena teorija infitinitezimalâ: između nacrta teorije i primjene metode", str. 244-282; Ivica Martinović, "Neostvarena teorija infinitezimalâ: između nacrta teorije i primjene metode", *Filozofska istraživanja* 13 (1993), pp. 453-474.

Geometrijsku je raščlambu[11] Bošković započeo razmatrajući pčelinju stanicu kao posudu u obliku šesterostrane prizme zadanog obujma (sl. 3). Dno takve posude je šesterokut GHIKLM koji se sastoji od tri romba MGHQ, HIKQ i KLMQ jednake površine. Što se događa ako se, primjerice, romb MGHQ zamijeni rombom MNHR uz uvjet da vrijedi GN = QR? Time se od obujma posude oduzima trostrana piramida MGHN, a dodaje mu se trostrana piramida MQHR. Osnovice tih piramida, a to su trokuti MGH i MQH, jednake su jer su polovice romba MGHQ, a njihove visine GN i QR jednake su na temelju postavljenoga uvjeta. Dakle, piramide MGHN i MQHR jednakog su obujma, pa se posudi, unatoč takvoj promjeni oblika, obujam nije promijenio. Isto se razmatranje može provesti i za ostala dva romba u šesterokutu GHIKLM. To znači da se polazna posuda zadanog obujma, sastavljena od šest pravokutnika i jednog šesterokuta, može zamijeniti posudom koja je sastavljena od šest trapeza i tri romba, a jednakog je obujma. Ono što se pri takvoj promjeni oblika posude zacijelo mijenja njezino je oplošje. Za svaki položaj točke N na bridu AG može se geometrijski konstruirati posuda kojoj je obujam jednak obujmu polazne posude ili, što je jednakovrijedno, kojoj je obujam unaprijed zadan. Time je Bošković konstruktivno riješio kako napraviti beskonačno mnogo prizmatičnih tijela koja su jednakoga obujma.

Još mu je preostalo ustanoviti koja među tim prizmatičnim tvorevinama ima najmanje oplošje. Da bi to postigao, Bošković je proveo dovitljivo razmatranje iz diferencijalne geometrije u kojem je intuitivno razumijevao pojam minimuma, a da nije upotrijebio pojam diferencijala. Neka se pretpostavi da su MNHR i MnHr dva romba beskonačno bliska položaju minimuma. Ako N prijeđe u n, pa time romb MNHR prijeđe u romb MnHr, onda je zbog pretpostavke opravdano držati da nije došlo do promjene oplošja prizmatične tvorevine, a to znači da uvećanje površine koje slijedi iz razlike površina tih dvaju rombova mora biti jednako umanjenju površine pobočja:

$$P(\diamond\ \mathrm{MnHr}) - P(\diamond\ \mathrm{MNHR}) = P(\Delta \mathrm{NHn}) + P(\Delta \mathrm{NMn}),$$

$$\mathrm{MH} \times \mathrm{nT} = \mathrm{Nn} \times \mathrm{GH}.$$

Odatle, uz elementarna geometrijska razmatranja, slijedi:

$$\mathrm{NR}^2 : \mathrm{MH}^2 = 1 : 2.$$

Romb, kojim oplošje prizmatične tvorevine postiže najmanju vrijednost, ima svojstvo da je kvadrat kraće dijagonale jednak polovici kvadrata duže dijagonale.

---

11 Geometrijsko je rješenje izloženo u: Boscovich, "De apium cellulis", nn. 667-670, pp. 500-501, a moj prijevod tih paragrafa na hrvatski uvršten je kao prilog 1 uz ovaj članak. Usp. prikaz Boškovićeva geometrijskoga rješenja u: Vladimir Varićak, "Matematički rad Boškovićev", *Rad JAZU* 181 (1910), str. 75-208, na str. 190-194.

U sklopu analitičkog pristupa,[12] Bošković je, dakako pod neposrednim utjecajem geometrijske raščlambe, za nepoznanicu x odabrao dužinu GN, pa oplošje stanice pčelinjegaa saća prikazao kao funkciju te varijable:

$$f(x) = 6ab - 3ax + 3\sqrt{3a^2x^2 + 3/4a^4}$$

gdje su:

a = AB = GH stranica šesterokuta,

b = AG duža osnovica trapeza,

x = GN = AG - AN razlika među osnovicama trapeza (sl. 4).

$$6ab - 3ax + 3\sqrt{3aaxx + \tfrac{3}{4}a^4}\,.$$

Sl. 4. Boškovićeva funkcija utroška voska pri gradnji pčelinjega saća: grafički zapis iz 18. stoljeća. Boscovich, "De apium cellulis", u: Benedictus Stay, Philosophiae recentioris ... versibus traditae libri X, *Tomus II. (Romae: Pagliarini, 1760), n. 680, p. 503.*

Prva dva člana u analitičkom zapisu ove funkcije prikazuju površinu pobočja sastavljenog od šest trapeza jednake površine. Treći član prikazuje površinu triju rombova koji samo s jedne strane omeđuju pčelinju stanicu.

Uz pomoć diferencijalnoga računa, Bošković je lako ustanovio da funkcija postiže minimum za vrijednost:

$$x = a/\sqrt{8}.$$

Pritom je našao samo stacionarnu točku, dakle nije tražio drugu derivaciju da bi ustanovio vrstu ekstrema jer je po smislu zadatka mogao očekivati jedino i samo minimum. I to, da nije tražio drugu derivaciju i njezin predznak u stacionarnoj točki, može se također smatrati obilježjem njegova pristupa primjenama infinitezimalnoga računa u geometriji.

Pošavši od analitičkog rješenja za x lako se, uz pomoć elementarnih geometrijskih razmatranja, dokaže bitno svojstvo romba koji je sastavni dio najmanjeg oplošja prizmatične tvorevine. Kako vrijedi:

$$SG^2 = 1/4\,a^2,\ SH^2 = 3/4\,a^2,$$

primjenom Pitagorina poučka dobije se odnos među dijagonalama romba, već otprije poznat iz geometrijskoga dokaza:

$$SN^2 = SG^2 + x^2 = 3/8\,a^2$$

$$SN^2 = 1/2\ SH^2,$$

$$NR^2 : MH^2 = 1 : 2.$$

---

12 Analitičko je rješenje izloženo u: Boscovich, "De apium cellulis", n. 680, pp. 503-504, a moj prijevod toga teksta uvršten je kao prilog 2 uz ovaj članak.

USPOREDBA GEOMETRIJSKOG I ANALITIČKOG RJEŠENJA

S metodološkoga stajališta, Boškovićev pristup matematičkom opisu stanice pčelinjega saća odlikuje se usporednom potragom za geometrijskim i analitičkim rješenjem problema. Da je tom prilikom Bošković prosuđivao koje je rješenje bolje i elegantnije, potvrđuje više istančanih iskaza. Prije negoli je započeo s izlaganjem oba svoja rješenja, Bošković je ustvrdio:

> "Uistinu, i rješenje je problema posve lako, bilo da se upotrijebi [infinitezimalni] račun, bilo i sama geometrija, a određivanje romba i njegovih kutova postaje posve jednostavnim i elegantnim".[13]

Poslije geometrijskog, a prije analitičkog rješenja, njegova je prosudba glasila:

> "Ovdje ću dodati samo ovo: ako se postupi po uobičajenoj analitičkoj metodi, još uvijek je rješenje posve lako i dobiva se isti ishod."[14]

Riješivši problem u sklopu diferencijalnog računa, Bošković je dobiveni ishod nužno morao geometrijski protumačiti zbog geometrijske naravi postavljenog problema. Ta mu je prigoda omogućila zaključnu usporedbu dviju metoda:

> "Uistinu, geometrija sama neposredno je povela onamo kamo računi nisu bili vodili, (...) A često se pak događa, upravo u takvim posve jednostavnim problemima, da geometrija daje jednostavnije i elegantnije ishode nego [infinitezimalni] račun. Ovdje, ipak, račun daje kutove trapeza dostatno lako."[15]

Boškovićeva pariška prosudba 1760. godine o tome kojoj od dviju matematičkih metoda dati prednost vrlo je odmjerena. Geometrijski dokaz odlikuje se neposrednošću, a to ovdje znači zornošću kakvu Bošković ne može prepoznati u postupcima infinitezimalnog računa. Glede MacLaurinova rješenja istog problema, što ga on nije imao prilike upoznati, on dodaje da geometrijsko rješenje ne može promašiti "što se tiče ili jednostavnosti

---

13 Boscovich, "De apium cellulis", n. 666, p. 500: "verum & problematis solutio est admodum expedita, sive adhibeatur calculus, sive etiam sola Geometria, & determinatio rhombi, atque angulorum provenit admodum simplex, & elegans, (...)"

14 Boscovich, "De apium cellulis", n. 679, p. 503: "Illud tantummodo hìc addam, si analytica usitata methodo sit procedendum, adhuc admodum expeditam solutionem esse, & eandem determinationem obvenire."

15 Boscovich, "De apium cellulis", n. 680, p. 504: "Verum Geometria ipsa immediatè eo deduxit, quo calculis non deduxisset, (...) Et quidem saepe accidit, potissimum in hujusmodi problematis admodum simplicibus, ut Geometria simpliciores, & elegantiores determinationes exhibeat, quam calculus. Hic tamen calculus angulos trapeziorum satis expedite exhibet:"

rješenja, ili prožimanja i povezivanja posljedica".[16] Ali i rješenju unutar diferencijalnog računa Bošković priznaje uobičajenost i lakoću.

BOŠKOVIĆEVA FUNKCIJA I NJEZINA GOSPODARSKA ZNAČENJA

Tražeći analitičko rješenje za problem izgradnje pčelinje stanice Bošković je našao realnu funkciju koja opisuje oplošje pčelinje stanice u ovisnosti o veličini koja jednoznačno određuje rombove koji zatvaraju pčelinju stanicu.

$$f(x) = 6ab - 3ax + 3\sqrt{3a^2x^2 + 3/4a^4},\ x \geq 0$$

i ustanovio da ta funkcija postiže minimum za vrijednost:

$$x = a/\sqrt{8}.$$

Ako se za vrijednosti parametara a i b odaberu vrijednosti koje se nalaze na crtežu (sl. 3) kojim se Bošković popratio svoj ogled *De apium cellulis*, dakle $a = 1$, $b = 3$ u odabranim jedinicama, onda analitički zapis funkcije glasi:

$$f(x) = 18 - 3x + 3\sqrt{3x^2 + 0.75},$$

a njezin graf prikazuje sl. 5.

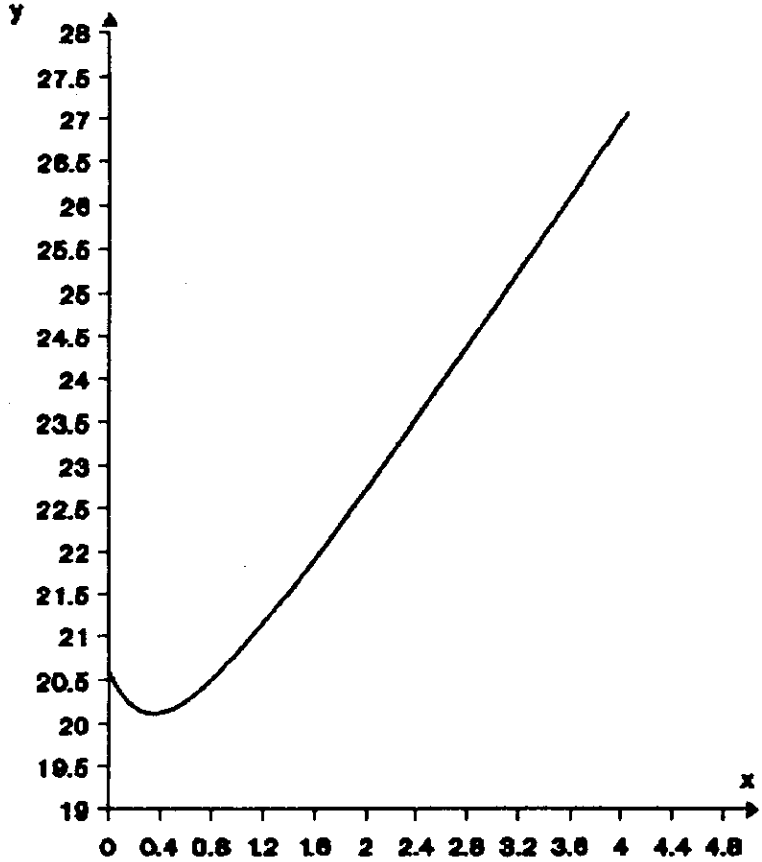
Boškovićevo analitičko rješenje doživjelo je visoke ocjene. Osobito valja istaknuti prosudbu engleskog istraživača Glaishera iz lipnja 1873. godine: "Odatle slijedi da je Bošković raspravio cijeli predmet u potpunosti, s pronicavošću i točnošću, izuzev jedne trivijalne omaške. Da su njegove primjedbe bile objavljene u djelu koje je poznatije i dostupnije prirodoslovcima, učinile bi, poslije sto i trinaest godina, suvišnim opovrgavati Réaumura i Königa."[17] Uz to, u matematičkom opisu pčelinje stanice zorno se ogleda Boškovićev pristup problemima primijenjene matematike.[18] Zato funkcija koja stoji u osnovi Boškovićeva analitičkoga

---

16 Boscovich, "De apium cellulis", n. 679, p. 503: "quod aut ad simplicitatem solutionum, aut ad penetrationem, & combinationes consectariorum pertineat".

17 J. W. L. Glaisher, "On the form of the cells of bees", *Philosophical magazine* 46 (1873), pp. 103-122, na p. 112.

18 Zornost je do te mjere naglašena da se model pčelinje stanice, popraćen izvornim Boškovićevim crtežima i rijetkim izdanjem u kojem je objavljen Boškovićev ogled o stanicama pčela, može predstaviti kao privlačni izložak. Usp. Ivica Martinović, *Ruđer Bošković (1711-1787)* (Zagreb: Croatian PEN Centre & Most/The Bridge in collaboration with Matica hrvatska, 1993), Exhibition catalog 23, 59th World P.E.N. Congress, Dubrovnik, Croatia, Sponza Palace, April 1993, na p. 19, izložak br. 74.



Sl. 5. Boškovićeva funkcija za utrošak voska pri gradnji stanice pčelinjega saća za vrijednost parametara: a=1, b=3

rješenja zaslužuje da bude nazvana *Boškovićevom funkcijom za utrošak voska pri gradnji pčelinjega saća.*

Koje je gospodarsko značenje Boškovićeve funkcije i njezinog minimuma? Problem izgradnje pčelinje stanice svodi se na problem najmanjeg utroška voska pri izradi stijenke pčelinje stanice. A utrošak voska u stijenci pčelinje stanice upravno je razmjeran oplošju te stanice. S gospodarskog motrišta, izgraditi stanicu saća znači isto što i pronaći najmanje oplošje prizmatičnoga tijela kojemu je obujam zadan. Da bi problem bio riješen, među svim tehnikama optimalizacije valja upotrijebiti onaj postupak za pronalaženje najboljeg ishoda koji se provodi uz određeni uvjet ili ograničenje (eng. *constrained optimization*). U ovom slučaju najbolji se ishod postiže kad se dosegne minimum utroška voska, odnosno najmanje oplošje, a ograničenje je zadani obujam pčelinje stanice. U hrvatskoj gospodarskoj literaturi za ovu se tehniku uvriježio stručni nazivak *pronalaženje optimuma*. Ondje gdje se u monografijama ili zbirkama zadataka proučavaju primjene diferencijalnoga računa u gospodarstvu, ta se vrsta problema i rješenja redovito oblikuje kao ogledni zadatak s do u tančine objašnjenim postupkom rješavanja.[19] Zbog jasne gospodarske motivacije i slikovitosti među takve zadatke valja, po mome mišljenju, uvrstiti i problem izgradnje pčelinje stanice i Boškovićevo rješenje toga problema iz 1760. godine.

Drugo gospodarsko značenje Boškovićeve funkcije valja potražiti u okviru gospodarskog modela koji proizvodnju razumijeva kao odnos između funkcije stalne količine proizvodnje q i sustava funkcijâ stalnog troška c_1, c_2, ..., što sam ga ukratko rastumačio na početku članka. Uz stanovite pretpostavke, Boškovićeva funkcija može se protumačiti kao funkcija stalne količine proizvodnje. Ako se pretpostavi, kako je i razložno, da je cilj proizvodnje posuda zadanog obujma, onda svaka točka grafa Boškovićeve funkcije opisuje taj cilj proizvodnje u ovisnosti o dva čimbenika. Prvi je čimbenik opisan apscisom x, dakle veličinom o kojoj ovisi kakvog će oblika biti posuda što je tek treba izgraditi. Moglo bi se reći da čimbenik x ima značenje svojevrsne odluke o ulaganju. Drugi je čimbenik opisan ordinatom f(x) kojoj je značenje brojčana vrijednost oplošja posude. A kako je oplošje posude upravno razmjerno utrošku voska, ono je onda razmjerno i uloženom radu da se izgradi stijenka posude. To pak znači da u ovom modelu drugi čimbenik posredno označuje uloženi rad.

U istom se koordinatnom sustavu može promatrati sustav funkcijâ stalnog troška. Svakom ordinatom f(x) može se jednoznačno povući pravac usporedan s osi apcisa, a taj je pravac po gospodarskom značenju funkcija stalnog troška. Među tim pravcima postoji pravac koji dira Boškovićevu funkciju kao funkciju stalne količine proizvodnje, i to je očito pravac koji prolazi minimumom Boškovićeve funkcije. Zato njegova jednadžba glasi:

$$y = f(a/\sqrt{8}).$$

Sukladno proučavanom gospodarskom modelu, pronalaženje dirališta u kojem usporednica s osi x, shvaćena kao "funkcija stalnog troška", dira Boškovićevu funkciju kao "funkciju stalne proizvodnje" uistinu je izbor tehnologije s najmanjim utroškom voska pri gradnji stanice pčelinjega saća.

Problem izgradnje pčelinje stanice je problem koji, zbog Boškovićeva rješenja i obrazloženja 1760. godine, pripada hrvatskoj matematičkoj i gospodarskoj baštini. Istodobno, zbog gospodarskih značenja Boškovićeve funkcije, taj problem zaslužuje da bude uvršten u poglavlje suvremene monografije ili udžbenika koje se bavi primjenama diferencijalnoga računa u gospodarstvu. Uobličen kao zadatak, on bi mogao glasiti ovako:

Problem: Gradeći stanicu saća kojoj je obujam jednak obujmu šesterostrane prizme (stranica osnovice a, visina b), pčela nastoji umanjiti utrošak voska koji je upravno razmjeran oplošju stanice saća. Uštedu na

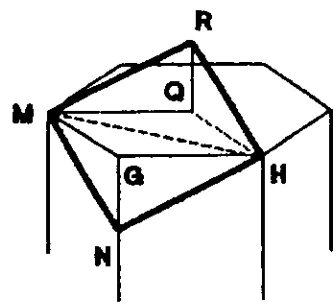
---

19 Usp. D. J. Harris, *Mathematics for Business, Management and Economics: A Systems Modelling Approach* (Chichester: Ellis Horwood Ltd, 1985), pp. 100-101, gdje je riješen jednostavniji problem utroška lima pri izradi limenke za pivu.

vosku ona postiže tako što stanicu saća ne zatvara šesterokutom, nego trima rombovima koji se sastaju u točki na osi prizmatične tvorevine.

(1) Nađi funkciju koja opisuje oplošje stanice pčelinjega saća (*Boškovićeva funkcija*).

Uputa: Uoči na priloženom crtežu (sl. 6) da se dva vrha romba nalaze u vrhovima M i H šesterokuta koje povezuje kraća dijagonala, dok treći vrh N leži na pobočnom bridu prizmatične tvorevine. Za nepoznanicu odaberi udaljenost između trećeg vrha N romba i vrha G prvotno zamišljenoga šesterokuta koji leže na istom pobočnom bridu.



Sl. 6. Umjesto da gradi plohe MGHQ, MGN i GHN, pčela radi uštede voska gradi plohu MNHR

(2) Nađi minimum Boškovićeve funkcije.

(3) Nacrtaj graf Boškovićeve funkcije za vrijednost parametra: a=1, b=3.

(4) Protumači gospodarsko značenje Boškovićeve funkcije i njezinoga minimuma.

(5) Nađi sve mjere stanice pčelinjega saća.

PRILOZI

1. Prvo, geometrijsko rješenje

667. Povuku li se MH, MQ i HQ,[20] dostatno je jasno da će MGHQ biti romb u kojem će trokuti MHQ i MHG biti jednaki, te će zato piramide, koje imaju te trokute za osnovice a vrhove u R i N, na isti način biti jednake[21] zbog jednakih visina QR i GN. Budući da se, zamjenjivanjem romba MNHR rombom MGHQ, zamijeni i piramida MQHR piramidom MGHN i budući da isto biva za preostala tri[22] romba HQKI i KQML koja se promijene u rombove HRKO i KRMP, dostatno je jasno da će obujam stanice omeđene u R trima rombovima uvijek biti jednak obujmu stanice omeđene šesterokutom GHIKLM koji god bio oblik i nagib tih rombova.

668. Preostaje, dakle, da treba potražiti takav oblik rombova koji daje površinu što je najmanja od svih. Minimum je ono kad, promijeni li se položaj rombova što prolaze uvijek istim točkama M, H i N, dvije beskonačno bliske površine budu uzajamno jednake ako se poslije minimuma po kolikoći ponovno vrati na veličinu koju je imala prije [minimuma]. Prijeđe li romb MNHR u MnHr (stranice Mr, Hr ovdje se ne povlače da bi se izbjegla zbrka), nužno će biti da se višak dužega romba spram kraćega[23] izjednači s dvama trokutima NHn, NMn, za koje se umanjuju trapezi ANHB, ANMF.

669. Nadalje, budući da se promjeri[24] u rombovima MGHQ i MNHR uzajamno raspolovljuju pod pravim kutovima, i GQ i RN prolazit će istom točkom S, tako da su SN, SH, SG polovice od RN, MH, QG, te je površina romba MNHR, dva puta veća od površine trokuta MNH, jednaka pravokutniku nad MH i SN.[25] Kako se uistinu stranica šesterokuta

---

20 Rado boljeg razumijevanja treba dodati: u šesterokutu MGHIKL sa slike 2 u ovom članku. I sve ostale oznake u ovom odlomku valja potražiti na slici 2.

21 Podrazumijeva se: jednakog obujma.

22 Treba ispraviti: dva, a ne tri romba

23 Latinski izričaj "višak dužega romba spram kraćega" znači: "razlika između površina romba MnHr i romba MNHR".

24 Promjer *(diameter)* je nazivak za dijagonalu geometrijskog lika, uobičajen u latinštini od prvih prijevoda grčkih matematičkih i prirodnofilzofskih klasika.

25 U latinskom jeziku to je ustaljeni izričaj za zadavanje pravokutnika osnovicom i visinom

GH izjednačuje s polumjerom QG opisane kružnice, bit će i GH dva puta veća od GS. Zato će kvadrati dužina GH, GS, SH biti kao 4, 1, 3.[26]

670. Ako se, kad N odlazi u n, zamisli luk NT polumjera SN sve do Sn,[27] bit će višak romba obilježenog sa n, r[28] spram romba obilježenog sa N, R jednak MH x nT, a slični će biti pravokutni trokuti NTn, SGn ili SGN. Dva pak trokuta NHn i NMn, budući da nad osnovicom Nn imaju jednake visine HG i MG, bit će oba zajedno jednaka Nn x GH. Dakle, bit će MH x nT = Nn x GH. Zato je Nn prema nT, ili NS prema NG, kao MH prema GH ili, raspolovivši, kao SH prema SG. A kako su njihovi kvadrati kao 3 prema 1, bit će i $NS^2 \cdot NG^2$ :: 3 · 1, i baš $SG^2 \cdot NG^2$ :: 2 · 1.[29] A zamjenom [mjesta] u razmjeru NS · NG :: SH · SG, bit će NS · SH :: NG · SG. Pa će, dakle, kvadrat od NS biti polovica kvadrata od SH, i, uz udvostručenje, kvadrat promjera NR bit će polovica kvadrata MH. Što je trebalo izvesti.

Boscovich, "De apium cellulis", nn. 667-670, pp. 500-501.

2. Drugo, analitičko rješenje

680. Neka je AB=GH=a, AG=b, GN=x.[30] Trapez ANHB bit će [površinom] jednak ab - 1/2 ax, zato će zbroj pobočakâ biti 6ab - 3ax. Bit će pak GS = 1/2a, te SH= $\sqrt{3/4aa}$, MH= $\sqrt{3aa}$, SN= $\sqrt{xx + 1/4\ aa}$, zato i romb MNHR = MH x SN = $\sqrt{3aaxx + 3/4a^4}$, kojega trostruka vrijednost dodana pobočkama daje površinu 6ab - 3ax + $3\sqrt{3aaxx + 3/4a^4}$. Diferencirajući ovu formulu, uzimajući da je diferencija[31] jednaka nuli i

26 Prošireni omjer, koji je tekstualno uobličen u Euklidovim *Elementima* a u latinskom jeziku posredovan mnogim prijevodima i tumačenjima, osobito znamenitim komentarom Christopha Claviusa, Boškovićeva predšasnika na matematičkoj katedri Rimskoga kolegija, danas se zapisuje u obliku: GH : GS : SH = 4 : 1 : 3.

27 To znači da se druga krajnja točka T luka NT nalazi na dužini Sn.

28 U znanstvenoj latinštini 18. stoljeća četverokut se obilježava navođenjem dvaju nasuprotnih vrhova.

29 Primjerice, oznaka $NS^2 \cdot NG^2$ :: 3 · 1 opisuje razmjer koji se danas zapisuje u obliku $NS^2 : NG^2 = 3 : 1$.

30 Sve oznake potraži na slici 2 u ovom članku.

31 Diferencija *(differentia)* je Leibnizov nazivak za definicijal kojim se znao poslužiti i Bošković, pa ga se prema tome ne smije brkati s pojmom razlike.

dijeleći sa dx, dobije se

$$-3a + \frac{9aax}{\sqrt{3aaxx + 3/4a^4}} = 0$$, pa se dijeleći sa 3a, prenoseći [na drugu stranu jednadžbe] i kvadrirajući dobije $$\frac{9aax}{3aaxx + 3/4a^4} = 1,$$

ili 3xx=xx+1/4aa, ili 12xx=4xx + aa, ili xx=1/8aa. Budući da je pak $SG^2 = 1/4aa = 2/8aa$, bit će $SN^2 = 3/8aa$.[32] Bilo je $SH^2 = 3/4aa$. Dakle, kvadrat SN je polovica kvadrata SH, a kvadrat NR je polovica kvadrata MH, kako je bilo izvedeno s pomoću geometrije.

Boscovich, "De apium cellulis", n. 680, pp. 503-504.

S latinskoga preveo i
bilješkama popratio
Ivica Martinović

LITERATURA

1. Boscovich, Rogerius Josephus. 1760. De apium cellulis, supplementum 6. ad librum sextum, u: Benedictus Stay, *Philosophiae recentioris ... versibus traditae libri* X, Tomus secundus (Romae: Typis, et sumptibus Nicolai et Marci Palearini, 1760), nn. 656-680, pp. 498-504, figg. 67-71.
2. Dadić, Žarko. 1982. *Povijest egzaktnih znanosti u Hrvata,* knjiga prva (Zagreb: Liber). Osobito poglavlje "Benedikt Stay i njegove poeme o prirodoznanstvenim filozofijama", str. 296-300.
3. Glaisher, J. W. L. 1873. On the form of the cells of bees. *Philosophical Magazine* 46, pp. 103-122.

32 Slijedi iz Pitagorina poučka za trokut SGN.

4. Harris, D. J. 1985. *Mathematics for Bussines, Management and Economics: A Systems Modelling Approach* (Chichester: Ellis Horwood Ltd).
5. Heathfield, David F.; Wibe, Sören. 1987. *An Introduction to Cost and Production Functions* (Houndmills/London: MacMillan Education Ltd).
6. Marković, Željko (ur.). 1957. Boškovićev put u Francusku g. 1759./60", u: *Građa za život i rad Rudžera Boškovića* 2 (Zagreb: JAZU, 1957), str. 5-242. U prilogu sadrži Truhelkinu transkripciju 39 pisama Ruđera Boškovića bratu Baru od 9. kolovoza 1759. do 14. svibnja 1760.
7. Martinović, Ivica. 1986. Pretpostavke za razumijevanje geneze Boškovićevih ideja o neprekinutosti i beskonačnosti: kronologija radova, povijesna samosvijest, tematske odrednice. *Vrela i prinosi* 16, str. 3-22.
8. Martinović, Ivica. 1988. Bošković's choice of method at the beginning of his mathematical career. *Dijalektika* 23, str. 57-71.
9. Martinović, Ivica. 1989. The genesis of Bošković's contributions to mathematics, u: Fritz Krafft and Christoph J. Scriba (eds), *XVIII International Congress of History of Science, 1st - 9th August 1989, Hamburg/Munich: Abstracts* (Hamburg: International Union of the History and Philosophy of Science/Division of History of Science), M2-13.
10. Martinović, Ivica. 1992. *"Rimsko razdoblje" Boškovićeva mišljenja* (Zagreb: Filozofski fakultet Sveučilišta u Zagrebu), doktorska disertacija. Osobito poglavlje "Neostvarena teorija infinitezimalâ: između nacrta teorije i primjene metode", str. 244-282.
11. Martinović, Ivica. 1993. Neostvarena teorija infinitezimalâ: između nacrta teorije i primjene metode. *Filozofska istraživanja* 13, str. 453-474.
12. Martinović, Ivica. 1993. *Ruđer Bošković (1711-1787).* (Zagreb: Croatian PEN Centre & Most/The Bridge in collaboration with Matica hrvatska). Exhibition catalog 23, 59th World P.E.N. Congress, Dubrovnik, Croatia, Sponza Palace, April 1993, 28 pp. Osobito odsječak "Mathematical results", pp. 18-20.
13. Stay, Benedictus. 1760. *Philosophiae recentioris ... versibus traditae libri X,* Tomus secundus (Romae: Typis, et sumptibus Nicolai et Marci Palearini).
14. Varićak, Vladimir. 1910. Matematički rad Boškovićev. *Rad JAZU* 181, str. 75-208. Osobito poglavlje "O stanicama pčela", na str. 187-200.

Dr. Ivica Martinović

RUĐER BOŠKOVIĆ'S FUNCTION DESCRIBING THE SURFACE AREA OF THE CELL OF BEES

Summary

During his stay in Paris in 1760 Ruđer Bošković studied the form of the cell of bees as a mathematical problem of minimization of the surface area for the given prismatic volume, immediately pointing out the economic motivation of this problem: "the most parsimonious use of wax" (cerae parcissimus usus). *Having solved the problem by means of geometric method, Bošković came to the conclusion that the solution could be easily obtained by calculus as well. Within the infinitesimal approach Bošković found the function describing the surface area of the cell of bees and, consequently, the quantity of wax used for the construction of honeycomb. Bošković's function can be explained within two economic models: constrained optimization and cost-minimizing choice of technology. Thus this mathematical and economic problem belonging to the Croatian heritage is suitable to be included in a monograph or textbook dealing with the applications of the differential calculus to the economy.*
The paper is accompained by the first translation into Croatian of geometric and infinitesimal solution published in Bošković's supplement De apium cellulis (On the cells of bees).

Key words: isocost, isoquant, cost-minimizing choice of technology, geometric form of the cell of bees, Bošković's function describing the surface area of the cell of bees, minimum of function, geometric method, calculus, constrained optimization